Германн фон Баравалль

ГЕОМЕТРИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

И ОБЗОР УЧЕБНОГО ПЛАНА ВАЛЬДОРФСКИХ ШКОЛ

Перевод и набор текста: Разрядов С. А.

Компьютерная графика: Белов Д.В.
Разрядов С.А.

Редактор текста : Сергеева Е. Ю.

ЯРОСЛАВЛЬ, 1997 Г.

Предисловие (Introduction).

В академическом мире повышается интерес к изданиям на тему образования. “Harvard Report” (Образование в свободном обществе) и много других публикаций убеждают в необходимости поиска новых ответов на изменения в современном образовании.

Стрессовое развитие индустрии, ускорение темпов жизни затрудняет поиск людей со свободным, раскрепощенным мышлением. Как только человек сталкивается с чем-то большим, чем простая рутинная работа, сразу высвечиваются недостатки и огрехи мышления. Вместо здравой гибкости и инициативности в повседневной работе, человеком овладевает псевдо-сообразительность и гибкость ума. Это выражается в бесконечной, навязчивой идее поменять работу или местожительство. Эти симптомы могут влиять на будущее нашего общества, на национальное благосостояние. Как можем мы помочь так направить мыслительную деятельность человека, чтобы он действовал в гармонии с природой и одновременно активно решал задачи, встающие перед ним в его практической деятельности?

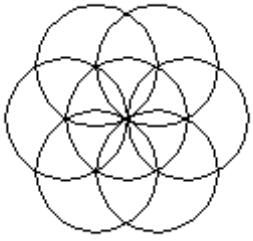
Среди детей мы можем заметить сходные симптомы. Критицизм и потребительство вместо чувства гармонии и активной общественной позиции распространяются, подобно чуме. Можем ли мы надеяться что хоть что-нибудь изменится к лучшему?

Как показывает опыт работы вальдорфских школ (школ, работающих по учебным планам доктора Рудольфа Штайнера), истина и конструктивное решение лежат на поверхности. Благодаря этому учебному плану найден баланс между мыслительной деятельностью и практической работой, что впоследствии приводит людей к здравому отношению к своей работе. Основной акцент делается на изменение взглядов учителя на школьные предметы в зависимости от возраста ученика. Предлагаемая книга может помочь прояснить эти вопросы.

Геометрия в старших классах средней школы (Geometry at the Junior High Grades).

Учебники геометрии в американских школах основаны на известной работе Лежандра по элементарной геометрии (“Elementary Geometry“ by Legendre), которая, в свою очередь, опирается на классическую геометрию Евклида. Восхитительная логическая структура Евклидовой геометрии прочна и законченна, но не является первым подходом к геометрии. Исторически, работы Евклида относятся к концу греческой геометрии. Евклид жил в Александрии Египетской, которая стала центром греческой культуры уже после того, как греки потеряли свою национальную независимость и свободу. Евклидовой геометрии предшествовали три столетия интенсивных математических исследований и сотни открытий, начиная с Фалеса и Пифагора, которых Евклид окончательно свел вместе в своих работах. Его безусловный вклад - это объединение и систематизация ранее полученных сведений. Но он не начинал новых исследований. В более ранние этапы были сделаны несомненно выдающиеся открытия, которые дали толчок всем последующим исследованиям. Не кажется ли более предпочтительным изучать в школе доевклидовские базовые труды по геометрии, чем давать конечный систематический обзор? Такая перестановка дает учащимся несомненные преимущества при изучении геометрии.

По вальдорфскому учебному плану геометрия вводится в 6-ом классе. Ученики изучают окружности и треугольники. Первый чертеж, который делают ребята, когда

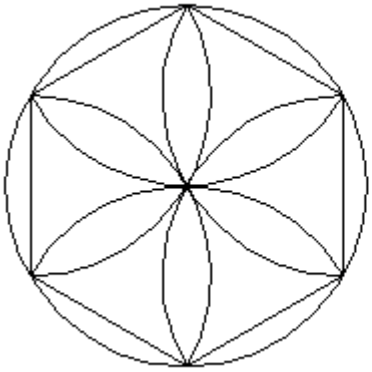


берут в руки инструмент, это композиция окружностей. Например, такая как показана на рис. 1 (деление окружности на 6 равных частей).

рис. 1. *Деление окружности на 6 частей.*

После того, как ученики начертят первую окружность, они помещают ножку циркуля на произвольную точку окружности и проводят вторую окружность того же радиуса. Эти две окружности имеют уже две точки пересечения, которые, в свою очередь, становятся центрами следующих окружностей того же радиуса и т . д. Таким образом, мы получили окружность, разделенную на 6 частей. Если соединить точки пересечения, мы получим правильный 6-угольник (см. рис. 2). Если мы соединим

каждую вторую точку, то получим показанный на рис. 3 правильный звездчатый (или самопересекающийся) шестиугольник, составленный из двух равносторонних треугольников. В середине мы опять получаем правильный шестиугольник, в который можно вписать новый звездчатый шестиугольник. Процесс может быть повторен несколько раз (см. рис. 4). Если закрасить пространство между звездчатыми многоугольники, как показано на рис. 3 и 4, то чертеж станет более приятным.



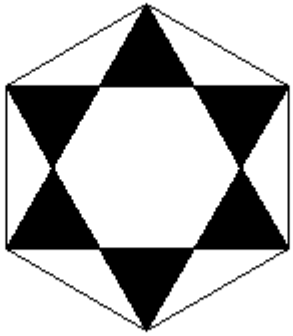
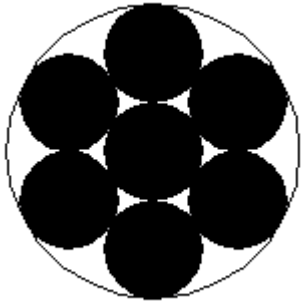


рис. 2 ***рис. 3*** ***рис. 4***

правильный шестиугольник *звездчатый шестиугольник*

Продвигаясь дальше от шестиугольников, Вы можете заметить, что 6 одинаковых монет полностью окружают седьмую (см. рис. 5). Их центры образуют правильный шестиугольник, а радиусы равны половине стороны шестиугольника. Геометрически комбинация из семи окружностей может быть представлена, как на рис.6



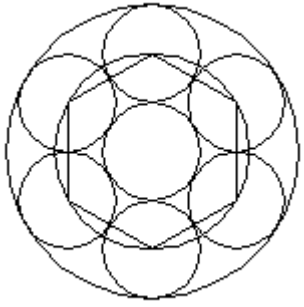


рис. 6, 7.

После того, как радиусом мы смогли поделить окружность на шесть равных частей, поделим дуги между вершинами пополам и получим 12-угольник. Последовательно соединим эти точки и получим фигуру, называемую правильный 12-угольник или додекагон. Соединим каждую вторую точку и получим звездчатый 12-угольник (см. рис. 7). Если мы соединим каждую третью точку, то получим другой звездчатый 12-угольник (см. рис. 8). На рис. 9 каждая точка соединена с каждой четвертой, а на рис. 10 с каждой 5-й. Звездчатый многоугольник на рис. 7 состоит из двух правильных шестиугольников, многоугольник на рис. 8 из трех квадратов, а многоугольник на рис. 9 из четырех правильных треугольников. Звездчатый многоугольник на рис. 10 представим в виде одиночных пересекающихся линий. Начиная с любой из двенадцати точек, последовательно соединяя каждую пятую, мы не вернемся к исходной точке, пока не обойдем все и не построим многоугольник полностью.

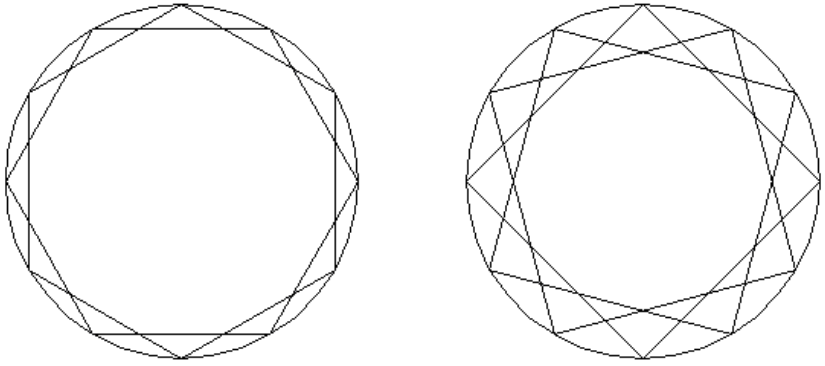
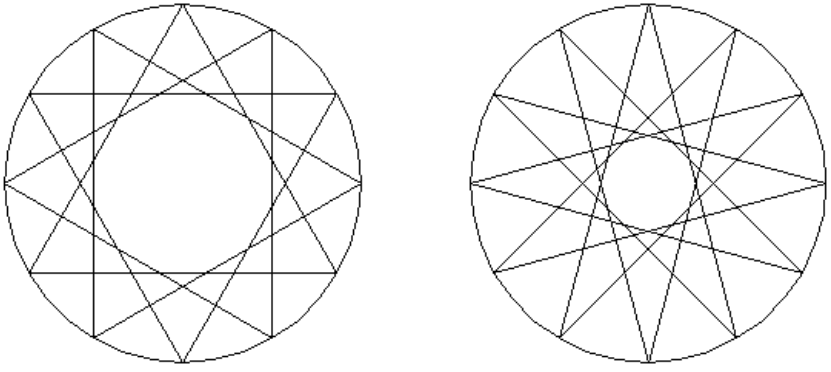
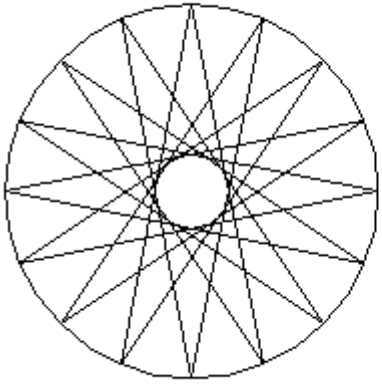


рис. 7,8(↑), 9,10(↓).



Такие упражнения могут иллюстрировать связь геометрии и науки о числе. Числа 5 и 7 не имеют общих множителей с 12. А числа 2 и 10 такой множитель имеют - 2. Если соединять каждую вторую или десятую точки, многоугольник распадется на две отдельные фигуры - шестиугольники (12:2=6). Числа 3 и 9 имеют с двенадцатью общий множитель 3. Значит, если соединить каждую третью или девятую точки, то получится три отдельных формы (все три - квадраты; 12:3=4). Соединяя каждую 10-ю точку, мы получим туже фигуру, как если бы соединяли каждую вторую; одна и та же фигура получится, если соединять каждую 3-ю или 9-ю точки. Вообще, если мы соединяем каждую (12-n)-ю точку, мы получаем ту же фигуру, что и соединяя каждую n-ю точку. Но последовательный неразрывный звездчатый многоугольник мы получим только если соединяем каждую 5-ю или 7-ю точки (см. рис. 10).

Применение звездчатых многоугольников показано на рис. 11 и 12. На рис. 11 окружность поделена на 16 равных частей последовательным делением дуг окружности пополам, начиная с полуокружности (ее можно получить, проведя диаметр). Теперь соединим каждую 7-ю точку. Число 7 взаимно просто с 16-ю, следовательно, многоугольник получится неразрывный. Теперь выделением линий на чертеже мы можем получить фигуру (см. рис. 12), полностью повторяющую шаблон для компасов, имеющих применение на кораблях или на самолетах.



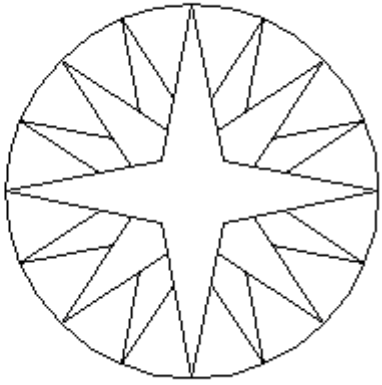


рис. 11, 12.

Построение различных многоугольников делением окружности на части можно продолжать до 10-угольников. Для построения семиугольника берется высота равностороннего треугольника, построенного на радиусах. Она (высота) будет приблизительно равна стороне семиугольника. При построении правильного 9-угольника встает задача трисекции угла, которую для острых углов решил Виет (см. рис. 13).

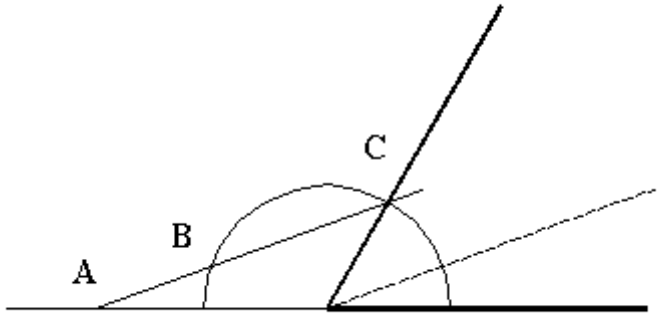
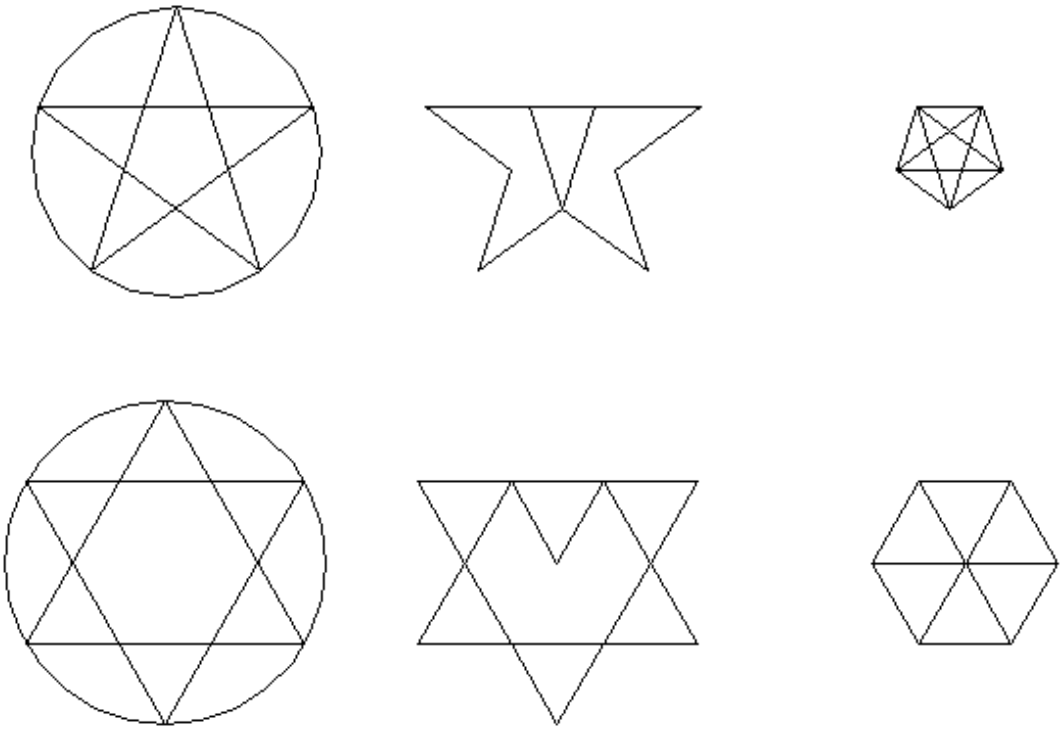


рис. 13.

Чтобы построить линию (на рисунке - пунктир), отсекающую треть угла (жирная линия), строим полуокружность. Отмечаем на продолжении диаметра точку А так, чтобы прямая АВ проходила через С и расстояние АВ было бы равно радиусу. Точка В должна лежать на окружности. Луч АВ задает направление для пунктирной линии. Чтобы ее построить, надо провести линию, параллельную АВ и проходящую через вершину угла.



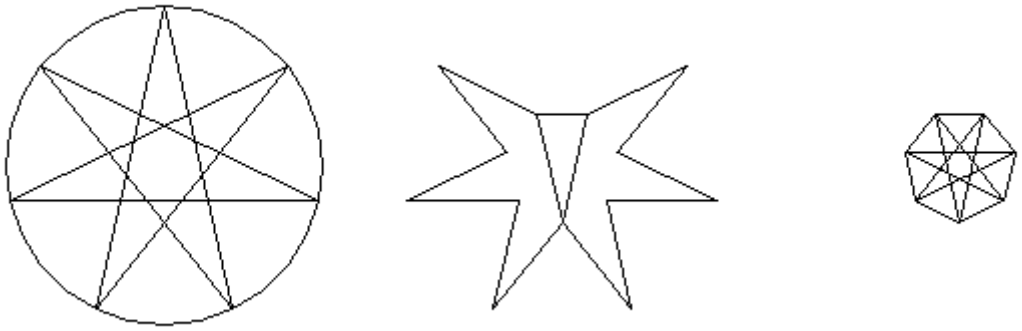


рис. 14, 15, 16

Среди достоинств различных звездчатых многоугольников некоторые вызывают особенный интерес. Если вырезать из бумаги звездчатый пятиугольник (пентаграмма) и загнуть лучики, как показано на рис. 14, мы получим другую пентаграмму. Если посмотреть этот пятиугольник на просвет, мы увидим новую пентаграмму, полностью подобную первой. Каждый треугольник, который был загнут, в точности достиг противолежащей вершины внутреннего пятиугольника. Этот эксперимент ставит вопрос: а все ли звездчатые многоугольники ведут себя подобным образом? В случае звездчатого шестиугольника (см. рис. 3) мы видим, что загнутые лучики не достигают противоположной вершины, но встречаются точно в центре. На просвет они тоже не образуют звездчатой фигуры, зато покрывают собой всю площадь (см. рис. 15). Если вырезать звездчатый семиугольник, у которого соединена каждая третья вершина, и загнуть лучики вовнутрь, мы получим новый внутренний звездчатый семиугольник (см. рис. 16). То же самое получится со звездчатыми многоугольниками с 9, 11, 13, 15 вершинами, у которых соединены каждая 4-я, 5-я, 6-я, 7-я точки (в общем случае, каждый (2n+1)-угольник , у которого соединена каждая n-я точка).

Звездчатые многоугольники с 8, 10, 12, 14 вершинами, у которых соединены каждая 3-я, 4-я, 5-я, 6-я точки (в общем случае, звездчатые 2n-угольники, у которых соединены каждая (n-1)-я точка) дают тот же результат, что и звездчатый шестиугольник; лучики, загнутые вовнутрь, достигают центра и полностью закрывают всю внутреннюю площадь. Этот геометрический факт показывает разницу между четными и нечетными числами.

На рис. 17-20 показаны звездчатые многоугольники с четным количеством вершин. Их внешние части загнуты вовнутрь, что показано линиями, проходящими через центр. Они делят звездчатые многоугольники на ромбы.

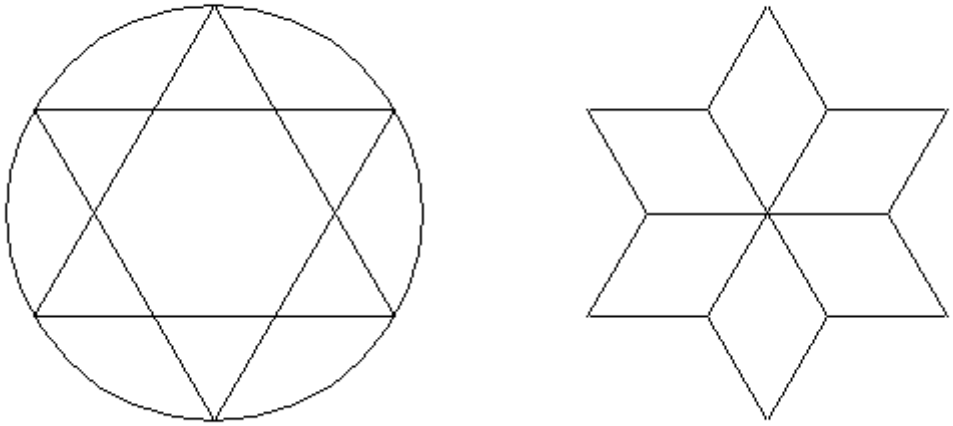


рис. 17.

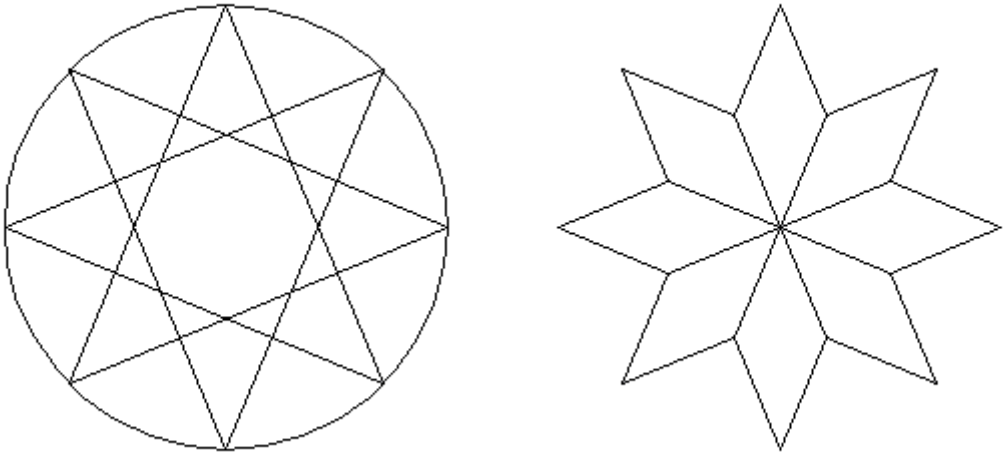
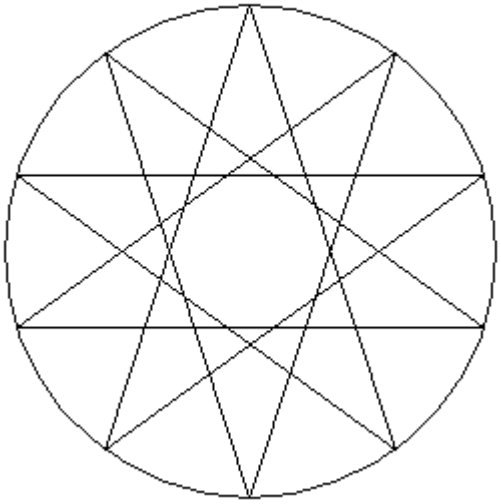


рис. 18.



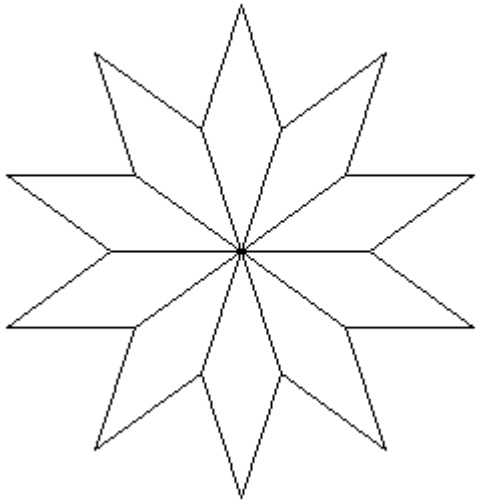
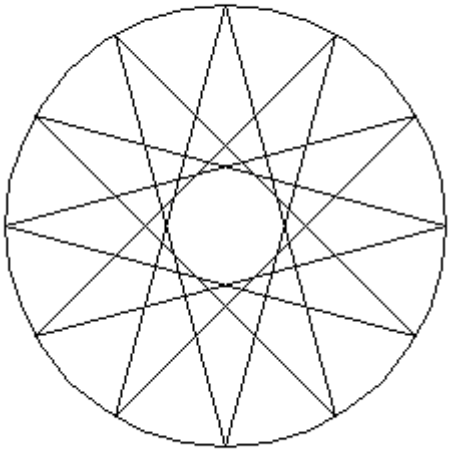
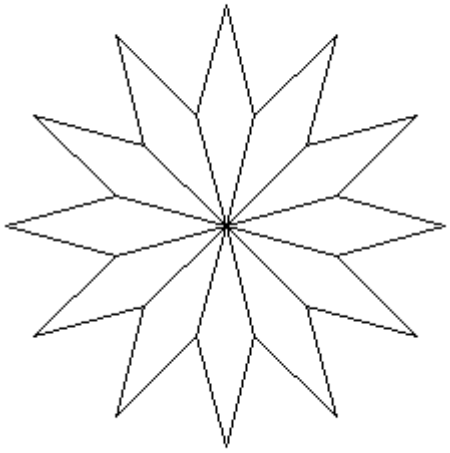


рис. 19(↑), 20(↓).





Другой способ получения ромбических звезд, показанных на рис. 17-20, заключается в последовательном сложении листка бумаги. На диаграммах рис. 21

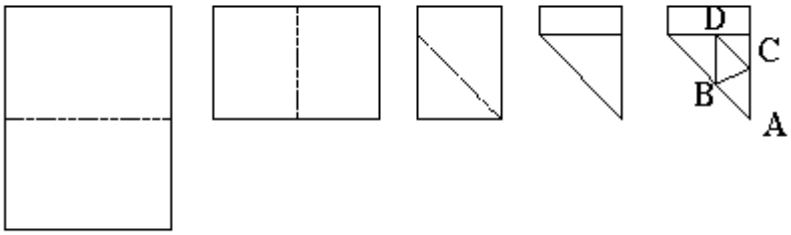


рис. 21.

показан порядок действий. Лист бумаги (первая диаграмма) складывают пополам и кладут так, как показано на второй диаграмме. Затем, складывают еще раз и сгибают его под углом 45° (третья и четвертая диаграммы). Затем находим точки B и C так, что AB=AC и точка D симметрична A относительно BC (у нас должен получиться ромб ABDC). Отрезаем лишнюю бумагу по линиям BD и DC и расправляем ее. Мы получили правильную ромбическую звезду, какую мы получили бы из звездчатого восьмиугольника.

Любую фигуру с рис. 17-20 можно получить аналогичным образом, сгибая и отрезая бумагу. Таким же методом можно получить правильный зездчатый многоугольник, например, как на рис. 7-10. Следующие диаграммы иллюстрируют это. На рис. 22 мы согнули лист бумаги так, что вокруг центра C получилось 12 слоев. Далее, мы проводим линию AB под углом в 45° к AC. После этого, проводим DE симметрично AB и образующую с CD угол в 45° (AC=CD). Теперь мы сдваиваем линии, как это показано на третьей диаграмме (рис. 22), и удаляем пространство, закрашенное черным цветом на последней диаграмме. Разворачиваем бумагу и получаем звездчатый 12-угольник, показанный на рис. 23. Другой звездчатый додекагон (12-угольник; см. рис. 24) получается из листа бумаги, сложенного вокруг C в 12 слоев. Это построение показано на рис. 25. Линию AB мы проводим под углом в 30° к AC и опускаем перпендикуляр BD на AC (первая диаграмма). Затем, проводим построения, симметричные первым (вторая диаграмма). Сдваиваем линии, как показано на третьей диаграмме и вырезаем пространство, выделенное черным цветом на четвертой диаграмме.

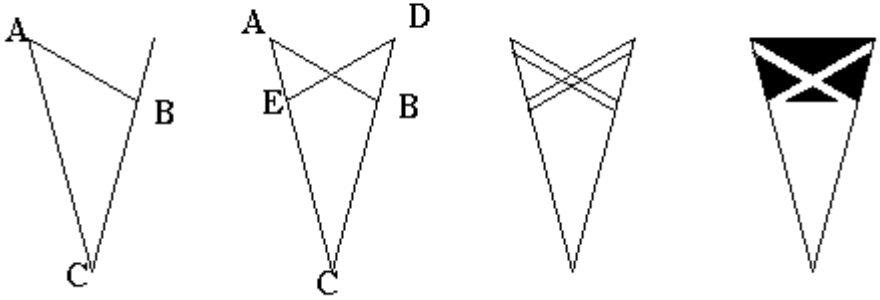


рис. 22.

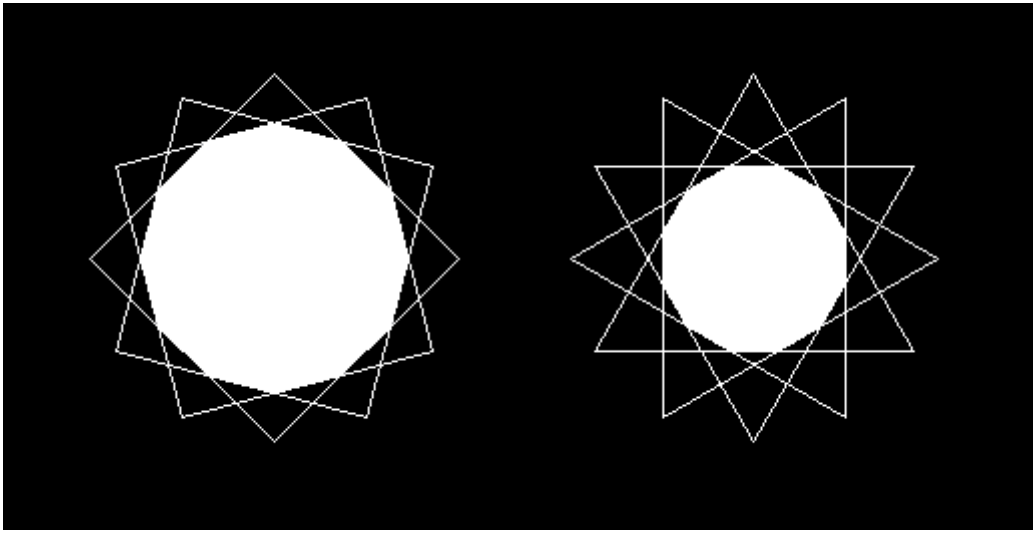


рис. 23. *рис. 24.*

На рис. 26 угол С должен быть 360°:16=22½° (для этого складываем бумагу в 16 слоев). Теперь Вы можете провести пересекающиеся линии под любым, удобным для Вас углом, как это показано на первой диаграмме рис. 26. Один конец должен быть выше другого. Повторяем процедуру сдваивания линий и удаляем закрашенное пространство. Развернув бумагу, мы получим два последовательных звездчатых восьмиугольника, сдвинутых на 22½° один относительно другого (см. рис. 27). Их лучи лежат попеременно внутри и снаружи. Последовательно двигаясь вдоль одного из них,

другой будет лежать попеременно то справа, то слева. Это немного напоминает движение партнеров по кругу в кадрили, когда они, взявшись за руки, двигаются в разных направлениях.

Все звездчатые многоугольники, находящиеся внутри данного многоугольника, образуют его диагонали. На рис. 28 показан 24-сторонний многоугольник со всеми своими диагоналями. Окружности, которые получаются внутри, являются хорошей проверкой на точность построения.

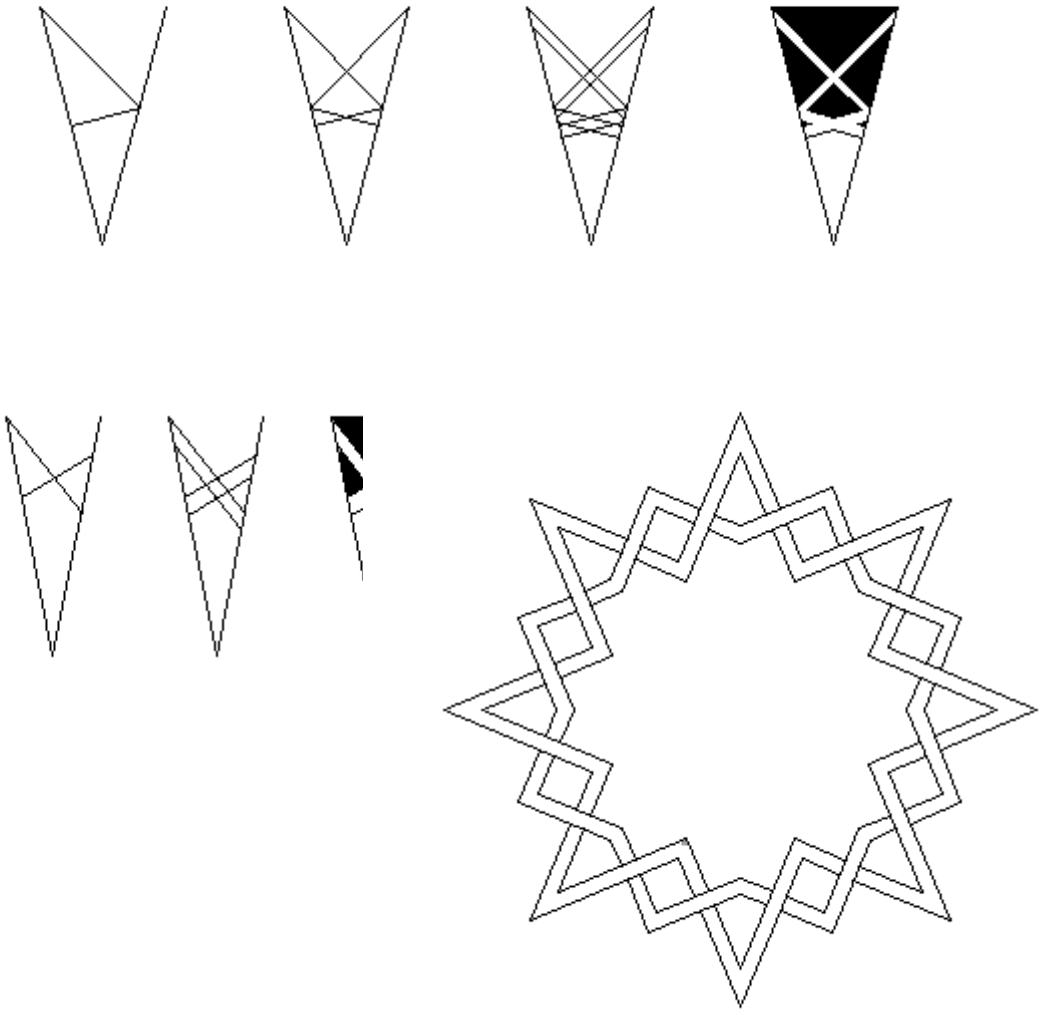


рис. 25, 26, 27.

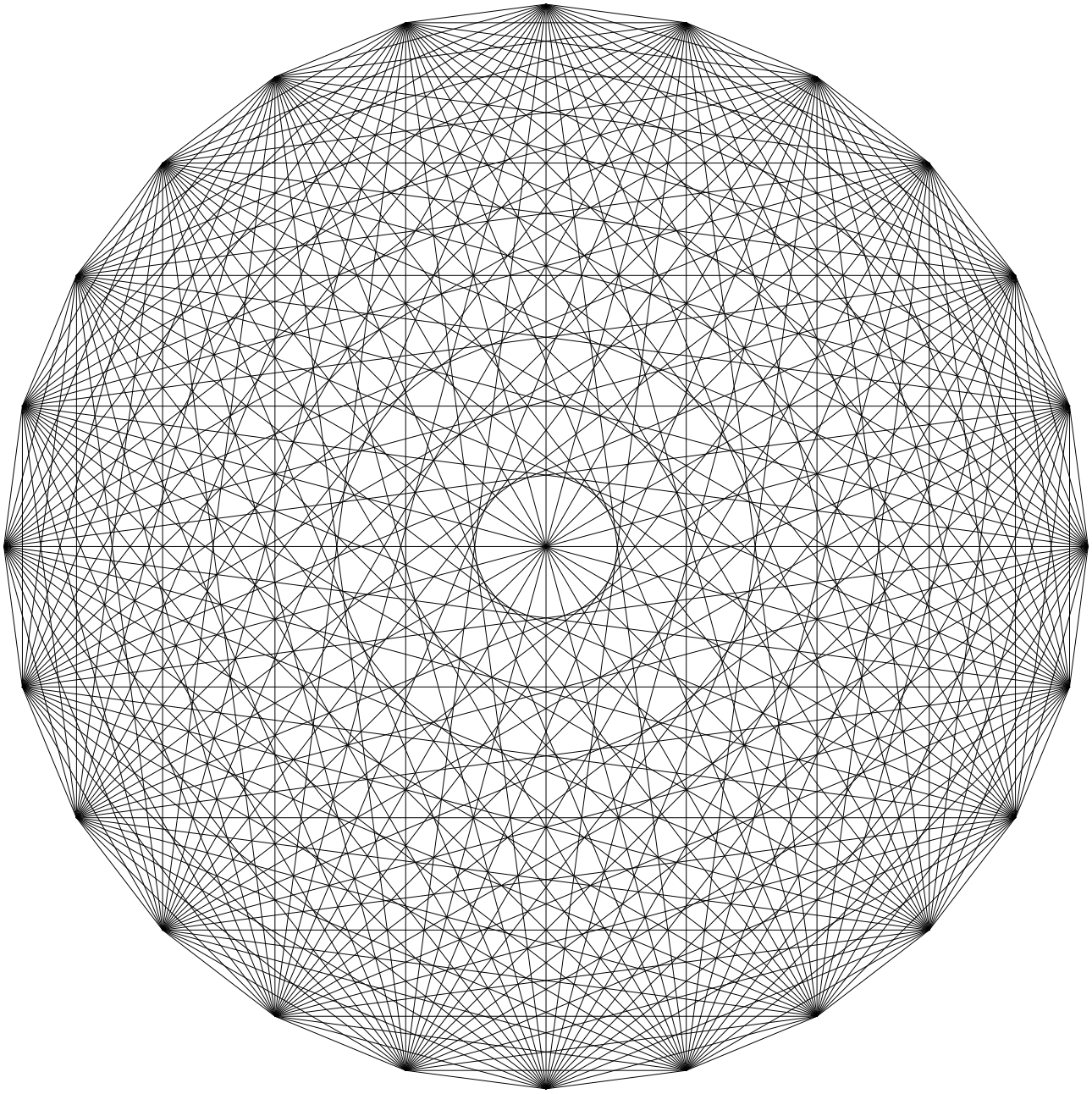
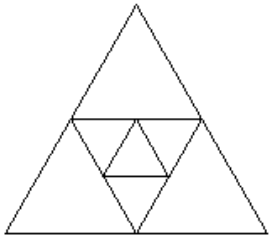


рис. 24.

После того, как мы имели дело с многоугольниками, мы можем продолжить с их комбинациями. Деля стороны пополам в любом правильном многоугольнике и соединяя точки деления, мы всегда будем получать правильный многоугольник, подобный первому. Процесс последовательного отыскания середин сторон и построения все новых фигур показан на рис. 29. Стороны каждого следующего

внутреннего треугольника уменьшаются в два раза; отношение площадей (большей к меньшей) равно ¼. Стороны треугольников так же как и их площади образуют геометрическую прогрессию. Тот же процесс применительно к квадрату показан на рис. 30. Здесь только на каждый второй шаг стороны квадрата уменьшаются в 2 раза, а лощадь в 4.



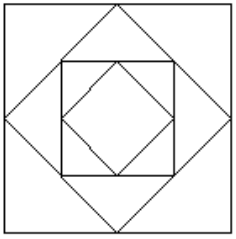
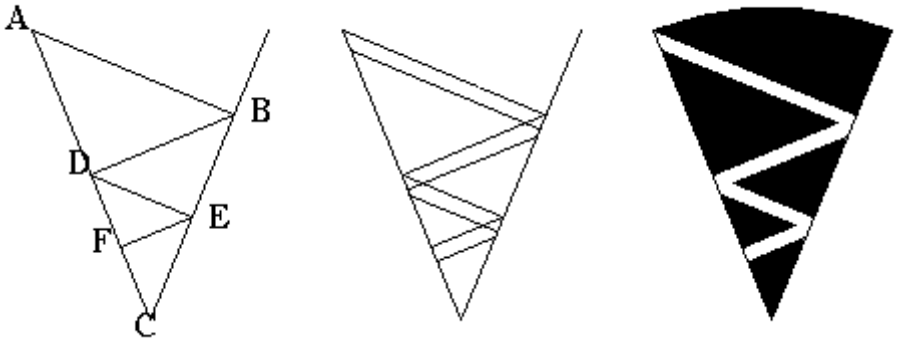


рис. 29. ***рис. 30.***

Складывая бумагу 3 раза, как показано на рис. 21, мы получаем центральный угол 45° (см. рис. 31). Теперь опускаем перпендикуляр из А к ВС; опускаем перпендикуляр из В к АС и т. д. (AB⊥BC, BD⊥AC, DE⊥CB, EF⊥AC). Сдваивая линию обычным образом и вырезая закрашенную поверхность, мы получаем фигуру, показанную на рис. 31. Это последовательность квадратов, уменьшаемых в геометрической прогрессии.

Сложим лист бумаги 6 раз так, чтобы угол АВС был равен 60°. Тогда, произведя соответствующие действия, мы получим фигуру, состоящую из треугольников, убывающих в геометрической прогрессии (см. рис. 29). Сложим бумагу 12 раз так, что центральный угол будет равен 360°:12=30°, а геометрическая прогрессия будет состоять из шестиугольников (см. рис. 32). Складывая бумагу в 16 слоев с центральным углом в 360°:16=22½° приведет к геометрической прогрессии восьмиугольников (см. рис. 33).



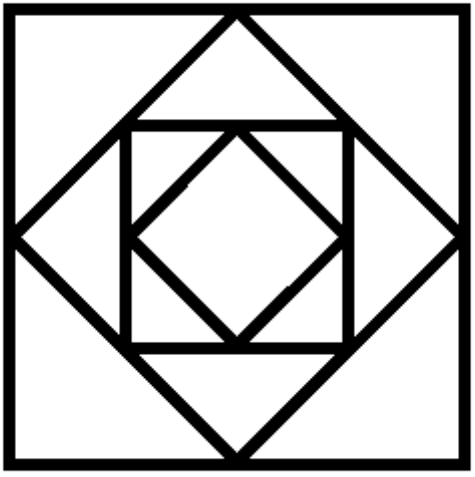
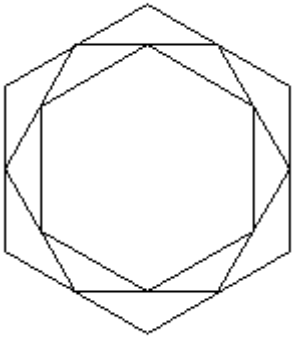


рис. 31.



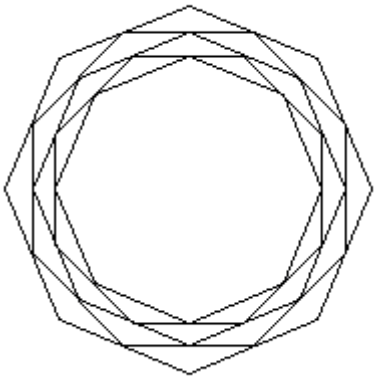


рис. 32. ***рис. 33.***

Дальнейшим шагом могут стать ряд трансформаций из одного многоугольника в другой. Отрезая углы равностороннего треугольника, как показано на рис. 34, мы получаем различные вариации шестиугольника. Начинаем отрезать по очень маленькой части. В какой-то момент треугольник трансформируется в правильный шестиугольник. Затем, отрезая все больше, мы достигаем такого состояния, что отрезаемые части становятся равны оставшимся. Мы опять пришли к исходному равностороннему треугольнику.

рис. 34.

Продолжая до пересечения линии обрезанного многоугольника, мы получим ряд фигур, показанных на рис. 35. Схема в середине, например, представляет из себя правильный звездчатый шестиугольник. Подобным образом можно провести много других трансформаций с различными правильными многоугольниками.

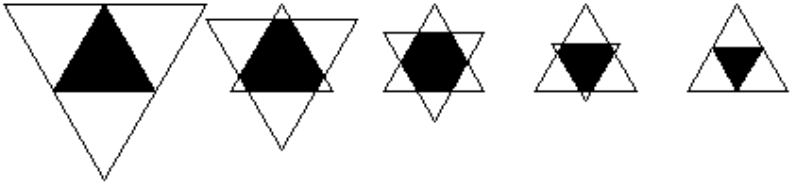


рис. 35.

В конце описания геометрических фигур может быть так же представлен оптический эксперимент. Для этого из двух зеркал составляем угол, как это показано на рис. 36. Поместим это угловое зеркало на белую ткань и положим в угол полоску цветной бумаги. Изменяя угол между зеркалами, мы сможем наблюдать различные правильные многоугольники. Например, если мы возьмем угол, равный 360°:6=60°, то в отражениях мы увидим правильный шестиугольник. А если раздвинуть зеркала на угол 360°:8=45°, то получим правильный восьмиугольник (см. рис. 36).

Если мы вырежем из бумаги равносторонний треугольник и поместим его между

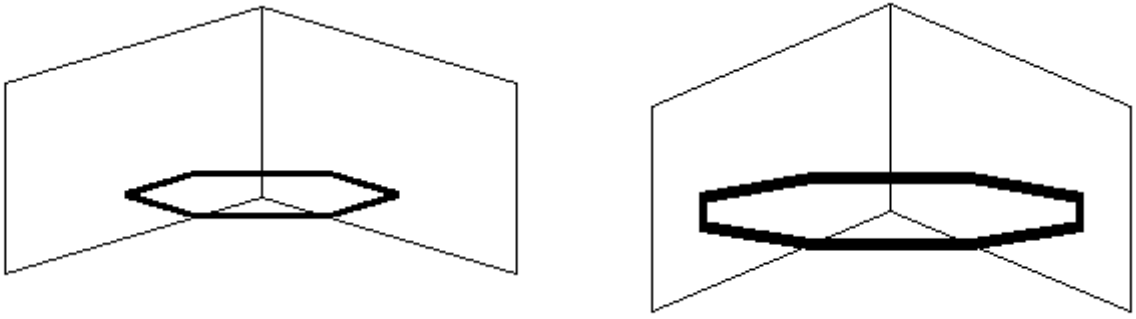


рис. 36.

зеркалами, то увидим звездчатый многоугольник. А если поместим туда 2 кружка цветной бумаги, то мы сможем наблюдать композицию из 7 окружностей. Взяв один сектор из наших складываемых фигур (последние диаграммы на рис. 22, 25, 26 и 31),

то мы увидим в зеркальном отражении полную фигуру, как будто мы уже развернули бумагу. С помощью углового зеркала мы можем наблюдать в движении весь процесс трансформации треугольника, показанный на рис. 34. Для этого надо вырезать из бумаги фигуру, показанную на рис. 38 (левая диаграмма). Средняя диаграмма

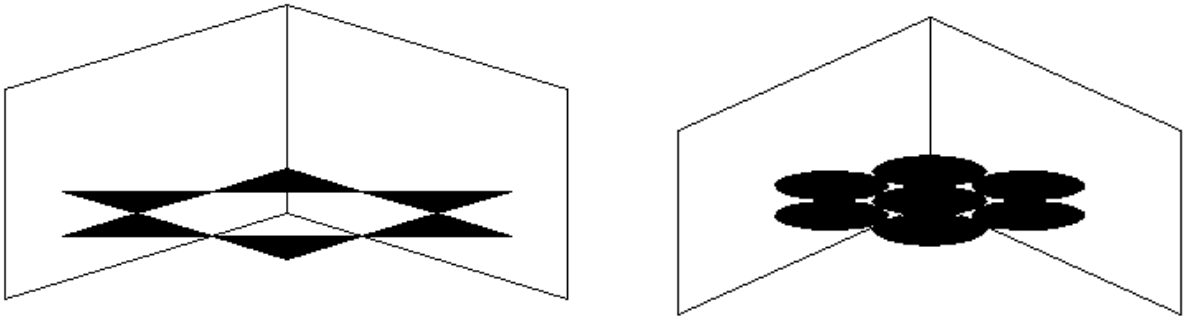


рис. 37.

показывает позицию углового зеркала (жирная линия) и положение бумаги. Фигура, вырезанная из бумаги и положенная под зеркало, дает в отражении равносторонний треугольник (на рис. она изображена пунктирной линией). Сдвигая ее так, чтобы показался вырезанный угол, мы будем видеть в отражении трансформацию треугольника. Когда точка А достигнет биссектрисы углового зеркала (правая диаграмма), в отражении мы увидим правильный шестиугольник.

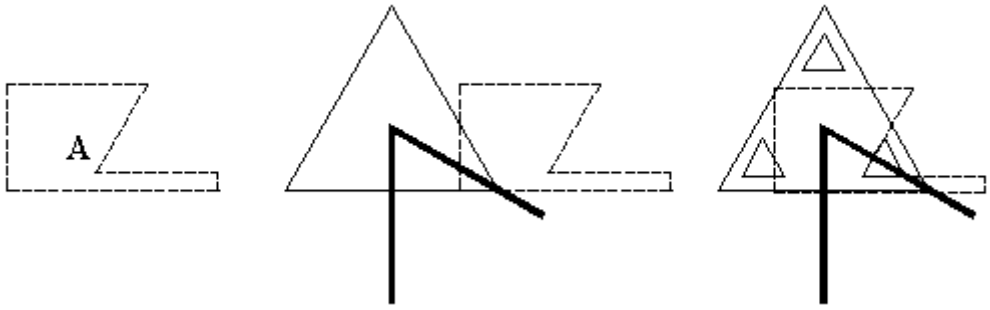
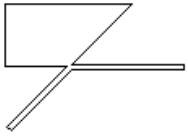


рис. 38.



Для отображения трансформаций треугольника, показанных на рис. 35, нам понадобится фигура, изображенная на рис. 39. Процесс движения бумаги аналогичен предыдущему.

рис. 39.

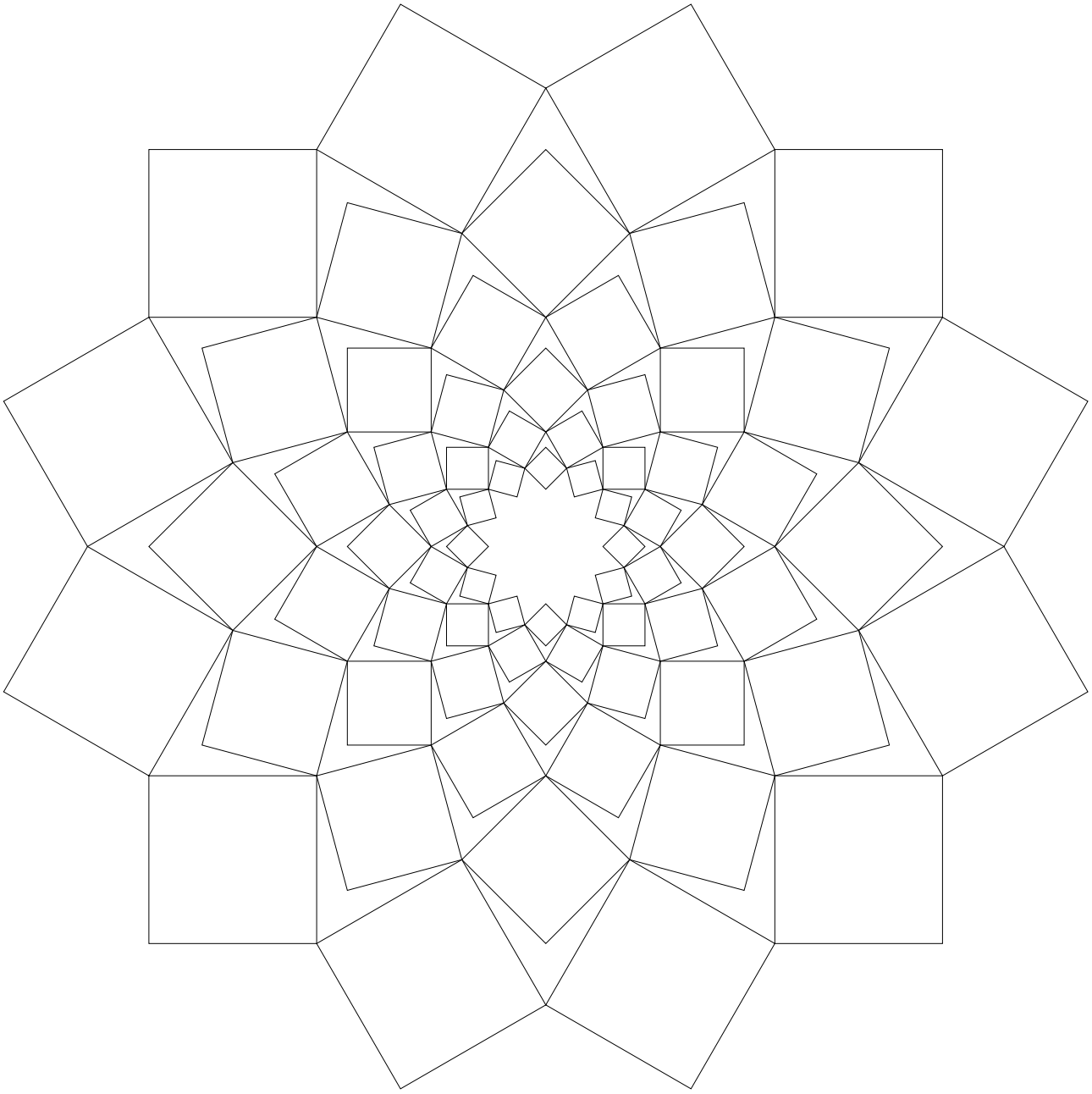
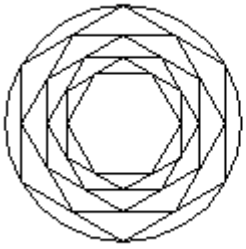


рис. 40.

На рис. 40 изображена фигура, являющаяся следующим шагом в изучении геометрической прогрессии. На рисунке изображена комбинация квадратов, полученных при делении окружности на 24 части. Для этого мы сделали вершинами квадратов каждую вторую точку окружности. А другие две вершины мы нашли с

помощью окружностей, построенных на диагоналях квадратов. Для второго слоя квадратов мы построили окружность радиусом от центра до ближайшей вершины квадрата. Отношение площадей двух соседних квадратов равно ½. Следовательно коэффициент геометрической прогрессии площадей равен ½. Что интересно, эта форма часто встречается в природе(семечки цветка подсолнечника, сосновые шишки и т. д.).

Дуги, образованные сторонами квадратов, являются логарифмическими спиралями. Таким образом, мы можем ввести понятие логарифмической спирали, отталкиваясь от геометрической прогрессии многоугольников. На левой диаграмме рис. 41 изображена геометрическая прогрессия шестиугольников. каждый последующий многоугольник опирается своими вершинами на средние точки сторон предыдущего шестиугольника. Линия, выделенная на правой диаграмме, показывает две ветви логарифмической спирали.



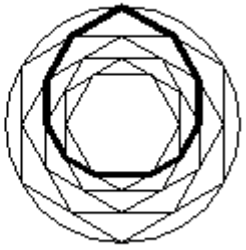
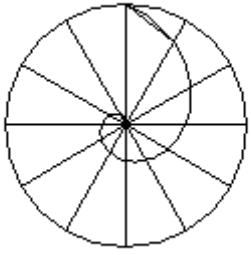


рис. 41. ***рис. 42.***



На рис. 42 одна из спиралей, построенных на сторонах шестиугольников, проведена опять. Это можно достигнуть построением минимального числа линий, начиная от окружности, разделенной на 12 равных частей радиусами. Начиная из любой точки, восстанавливаем перпендикуляр к следующему радиусу. Основание перпендикуляра является исходной точкой для следующего и т. д.

Логарифмическая спираль - одна из самых часто встречающихся в природе кривых. Мы можем найти ее во многих раковинах, амонитах и др. В раковине наутилуса форма логарифмической спирали является результатом роста малюска, заключенного в раковину. Постепенно, шаг за шагом, он строит ее, вырастая из своего старого жилища. В этом случае логарифмическая спираль есть геометрическое выражение органической жизни. Oliver Wendell holmes в своей поэме “The Chambered Nautilus” замечательно это описал.

После логарифмической спирали можно продолжить со спиралью, связанной с арифметической прогрессией так же, как логарифмическая спираль связан с

геометрической. Эта спираль названа в честь великого ученого древности Архимеда, который подробно изучал ее. На рис. 44 она построена в окружности, разделенной на 16 равных частей. Точки этой спирали получены равномерным движением сразу в двух направлениях: от радиуса к радиусу и от окружности к центру. Начало спирали лежит на окружности. Следующую точку спирали строим на соседнем радиусе на некотором расстоянии от окружности. Это расстояние может быть выбрано произвольно, но раз выбранное, оно не может быть изменено. На следующем радиусе откладываем это расстояние дважды, потом трижды и т. д. Полученные таким образом точки

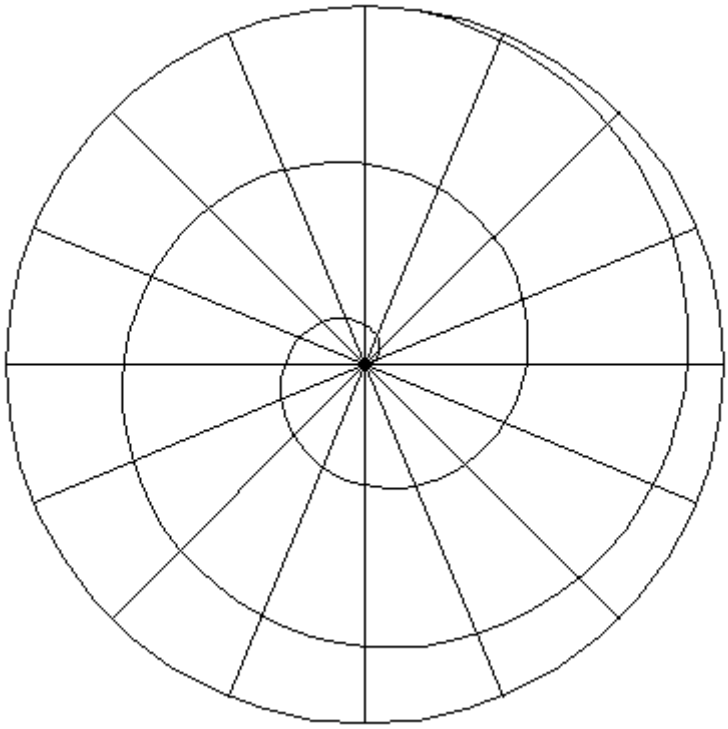


рис. 43.

соединяются плавными кривыми и мы получаем спираль Архимеда. Обратите внимание, что логарифмическая спираль никогда не достигает центра, а спираль Архимеда в центре окружности. Спираль Архимеда можно увидеть на кораблях, когда матросы наматывают канаты на кнехты. Спираль Архимеда описывает игла на грампластинке, двигаясь вдоль звуковой дорожки.

Построим две ветви спирали Архимеда, исходящие из одной точки так, чтобы пройдя полкруга, они встретились в центре (см. рис. 45). Повторим это построение внутри равностороннего треугольника и правильного пятиугольника (см. рис. 46 и 47). В фигурах, построенных таким образом, легко распознаются формы листа. Подобные построения можно продолжить.

Тот факт, что другие разделы геометрии, которые обычно даются в средней школе, пропущены в этих упражнениях, не означает, что ими пренебрегли в учебных планах вальдорфских школ. Наоборот, в этот план включены главы, которые в средней школе обычно опускают. Например, линейная перспектива.

Читателям, желающим побольше узнать о затронутых в этой книге темах, можно посоветовать периодические издания “The Mathematics Teacher” (Teachers College, New York), и 18-ый ежегодник Национального Совета учителей математики (Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, New York, 1945 г).

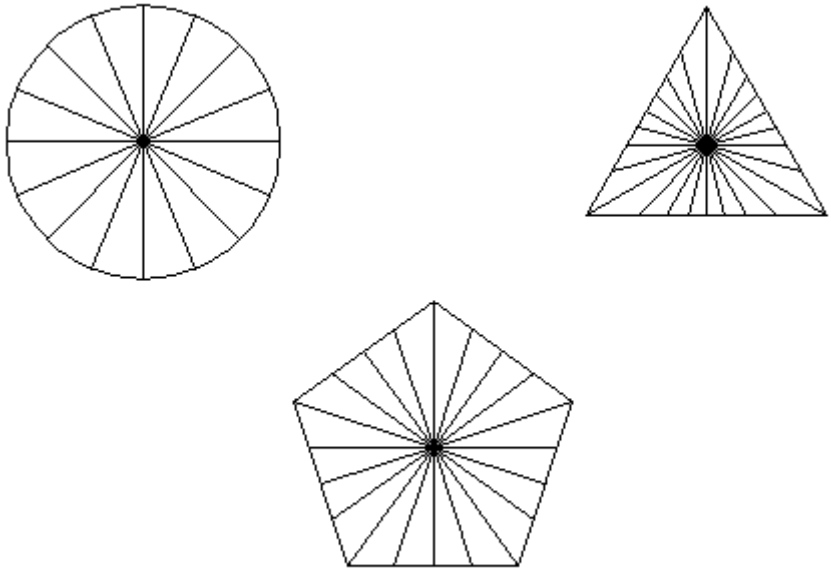


рис. 44, 45, 46.

Заключение (Summary).

Представленная Вашему вниманию книга затрагивает аспекты числовой геометрии, геометрических построений, концепцию углов и градусов, треугольников, четырехугольников и прочих многоугольников, логарифмических спиралей, спиралей Архимеда и др.

Легко заметить, что описанный метод может быть распространен на любой другой материал. Вообще, методы вальдорфской педагогики могут соприкасаться с любыми стандартами и требованиями.

Одновременно с увеличением геометрических знаний ребенок все больше совершенствует мастерство своих рук. Чертежи требуют внимания, точности и аккуратности. Обычно учащиеся сами пишут и иллюстрируют свои альбомы-учебники. Эти рукописные книги взращивают такие умения, на которые ученики с удовольствием тратят время и силы и добиваются хороших результатов.

Изучая геометрию, ребенок узнает нечто новое о окружающей его природе, форме листьев, цветов. Он постигает законы оптики и их связь с геометрией. Даже такой далекий, казалось бы от геометрии предмет, как поэзия, он встречает на уроках геометрии. Эта наука встает перед учеником не просто, как набор придуманных людьми теорем и их доказательств. Немаловажным является так же и то, что геометрические построения захватывают воображение, и кое для кого в классе это может стать решающим фактором в определении своих интересов.

Многообразие подходов вызовет многообразие интересов, которые охватят большую часть класса. В этом заключается балансирующий эффект такого рода деятельности. Другим результатом такой работы является то, что дети не так быстро устают. Такие уроки могут быть более продолжительными. О том, чем заполнить это учебное время, говорится на следующих страницах.